BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

О РЕГУЛЯРНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С.С.МИРЗОЕВ, Э.Н.МАМЕДОВ

Бакинский Государственный Университет,

Нахичеванский Государственный Университет

В работе получена теорема о регулярной разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа в некоторых весовых гильбертовых пространствах. Определена связь между нижней границей спектра основного оператора в главной части операторно-дифференциального уравнения с показателем весового пространства. Получены также оценки норм операторов промежуточных производных относительно главной части операторно-дифференциального уравнения.

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим краевую задачу

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u = -\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u + A_0\frac{d^2u}{dt^2} + A_1\frac{du}{dt} + A_2u = f(t),\ t \in R_+ = (0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0) = 0\ , \tag{2}$$

где A, A_o, A_1, A_2 -линейные операторы в H , $f(t), u(t)$ -векторнозначные функции со значениями в H , а все производные понимаются в смысле теории обобщенных функций.

Предположим , что выполняются следующие условия:

1) A - положительно определенный самосопряженный оператор с нижней границей μ_o, т.е. $(Ax,x) \ge \mu_o(x,x),\ \ x \in D(A)$.
2) $B_j = A_jA^{-j}\ (j = \overline{0,2})$ суть ограниченные операторы в H .

Отметим, что оператор A порождает некоторую шкалу гильбертовых пространств $H_\alpha\ \ (\alpha \ge 0)$, причем

$H_\alpha = D(A^\alpha),(x,y)_\alpha = (A^\alpha x, A^\alpha y),\ x,y,\in D(A^\alpha)$.

Пусть $\gamma -$ некоторое действительное число: $\gamma \in R = (-\infty,+\infty)$. Обозначим $L_{2,\gamma}(R_+;H)$ гильбертово пространство вектор-функций со значениями в H, сильно измеримых, квадратично интегрируемых с весом $e^{-2\gamma t}$ на R_+ и положим

$$\|f\|_{L_{2,\gamma}(R_+;H)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\|_H^2 e^{-2\gamma t} dt \right)^{1/2}.$$

Далее, определим следующие гильбертовы пространства [1-4] :

$$W_{2,\gamma}^2(R_+;H) = \left\{ u(t): \ u'' \in L_{2,\gamma}(R_+;H), A^2 u \in L_{2,\gamma}(R_+;H) \right\},$$

$$\overset{o}{W}{}_{2,\gamma}^{2}(R_+;H) = \left\{ u(t) : u(t) \in W_{2,\gamma}^2(R_+;H) \ , \ u(0) = 0 \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(R_+;H)} = \left(\|u''\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+;H)} + \|A^2 u\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+;H)} \right)^{1/2}.$$

Аналогично определяются гильбертовы пространства

$L_{2,\gamma}(R;H)$, $W_{2,\gamma}^2(R;H)$, где $R = (-\infty, \infty)$. Считаем, что

$L_{2,0}(R_+;H) = L_2(R_+;H)$ $W_{2,0}^2(R_+;H) = W_2^2(R_+;H)$,

$\overset{o}{W}{}_{2,o}^{2}(R_+;H) = \overset{o}{W}{}_{2}^{2}(R_+;H)$, $L_{2,0}(R;H) = L_2(R;H)$,

$W_{2,0}^2(R;H) = W_2^2(R;H)$.

Определение 1. Если при $f(t) \in L_{2,\gamma}(R_+;H)$ вектор-функция $u(t) \in W_{2,\gamma}^2(R_+;H)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R_+, то будем ее называть регулярным решением уравнения (1).

Определение 2. Если при любом $f(t) \in L_{2,\gamma}(R_+;H)$ существует регулярное решение уравнения (1), которое удовлетворяет краевому условию (2) в смысле

$$\lim_{t \to +0} \|u(t)\|_{3/2} = 0,$$

и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(R_+;H)} \le const \|f\|_{L_{2,\gamma}(R_+;H)},$$

то будем говорить, что краевая задача (1),(2) регулярно разрешима.

В данной работе получены некоторые условия на коэффициенты операторно-дифференциального уравнения (1), при выполнении которых задача (1),(2) является регулярно разрешимой в некоторых весовых пространствах. Отметим, что показатели этих весовых пространств тесно связаны с нижней границей спектра оператора A, т.е. с числом μ_o. Эта задача при $A_o = 0$ была исследована в работе [2], но результат, полученный нами другим методом, дает возможность расширения класса операторно-дифференциальных уравнений (1) (даже при $A_o = 0$), для которых задача (1),(2) регулярно разрешима. Кроме того, здесь получены более точные оценки норм операторов промежуточных производных в весовых пространствах, которые имеют самостоятельный математический интерес. Когда $A_o = 0$, $A_1 = \alpha_1, A_2 = \alpha_2$ - постоянные числа, а оператор A эллиптический оператор, с дискретным спектром, эта задача исследована в [3]. В работе [4] рассмотрен более общий случай, но условия разрешимости задачи (1),(2) даны в терминах оценки резольвенты соответствующего операторного пучка, которые являются трудно проверяемыми. В многомерной области эллиптические уравнения (а не краевые задачи) рассмотрены в работе [5], но условия разрешимости даны в терминах оценки резольвенты. В работе [6] исследована краевая задача $u'(0) = 0$ для уравнения (1) при $A_o = 0$, где авторы используют методику работы [2].При γ=0 задача (1),(2) полностью исследована в работах [7,8].

Введем следующие обозначения :

$$P_0 u = -u'' + A^2 u, \qquad u \in \overset{o}{W}{}^2_{2,\gamma}(R_+;H), \tag{3}$$

$$P_1 u = A_0 u'' + A_1 u' + A_2 u, \qquad u \in \overset{o}{W}{}^2_{2,\gamma}(R_+;H), \tag{4}$$

и

$$Pu = P_0 u + P_1 u, \qquad u \in \overset{o}{W}{}^2_{2,\gamma}(R_+;H). \tag{5}$$

После замены $u(t) = \vartheta(t)e^{\gamma t}$ получаем следующую краевую задачу:

$$P_\gamma \vartheta = -\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right)^2 \vartheta + A^2 \vartheta + A_0 \left(\frac{d}{dt} + \gamma\right)^2 \vartheta + A_1 \left(\frac{d}{dt} + \gamma\right) \vartheta + A_2 \vartheta = g, \tag{6}$$

$$\vartheta(0) = 0, \tag{7}$$

где $\vartheta(t) = u(t)e^{-\gamma t} \in W_2^2(R_+;H)$, $g(t) = f(t)e^{-\gamma t} \in L_2(R_+;H)$.

Теперь введем следующие обозначения

$$P_{0,\gamma} \vartheta = -\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right)^2 \vartheta + A^2 \vartheta, \qquad \vartheta \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H), \tag{8}$$

$$P_{1,\gamma}\vartheta = A_0\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)^2\vartheta + A_1\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)\vartheta + A_2\vartheta, \quad \vartheta \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H). \tag{9}$$

Сперва докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть выполняется условие 1) и $\gamma \in R$ удовлетворяет условию: $|\gamma| < \mu_0$, где μ_0 - нижняя граница спектра оператора A. Тогда оператор P_0, определенный операторно-дифференциальным выражением (3), изоморфно отображает пространство $\overset{o}{W}{}_{2,\gamma}^2(R_+;H)$ на $L_{2,\gamma}(R_+;H)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что при выполнении условия леммы 1 оператор $P_{0,\gamma}$, определенный выражением (8), изоморфно отображает пространство $\overset{0}{W}{}_2^2(R_+;H)$ на $L_2(R_+;H)$.

Поэтому сперва рассмотрим краевую задачу:

$$P_{0,\gamma}\vartheta = -\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)^2\vartheta + A^2\vartheta = g, \tag{10}$$

$$\vartheta(0) = 0 \ . \tag{11}$$

Очевидно, что однородное уравнение $P_{0,\gamma}\vartheta = 0$ имеет общее решение, из пространства $W_2^2(R_+;H)$, вектор – функцию

$$\vartheta_0(t) = e^{-(A-\gamma E)t}\varphi_0, \tag{12}$$

где E - единичный оператор в H, $\varphi_0 \in H_{3/2}$ [1]. При $|\gamma| < \mu_0$ оператор $-(A-\gamma E)$ порождает сильно непрерывную полугруппу линейных ограниченных операторов $e^{-(A-\gamma E)t}$, $t \ge 0$, поэтому из условия (11) вытекает, что $\vartheta(t) = 0$, т.е. однородное уравнение $P_{0,\gamma}\vartheta = 0$ имеет только нулевое решение из $W_2^2(R_+;H)$. Теперь покажем, что оператор $P_{0,\gamma}\vartheta$ отображает пространство $\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H)$ на $L_2(R_+;H)$. Для этого достаточно доказать, что уравнение (10) с краевым условием (11) имеет решение из $\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H)$ при любом $g(t) \in L_2(R_+;H)$.

Очевидно, что вектор-функция

$$\vartheta_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-(-i\zeta+\gamma)^2 E + A^2\right)^{-1}\int_0^{+\infty} g(s)e^{i(s-\zeta)t}ds\, d\zeta \ , \quad t \in R \ ,$$

удовлетворяет уравнению (10) почти всюду в R_+. Теперь покажем, что $\vartheta_0(t)\in W_2^2(R;H)$, $(R=(-\infty,\infty))$. По теореме Планшареля достаточно доказать, что $A^2\hat{\vartheta}_o(\zeta)\in L_2(R;H)$ и $\zeta^2\hat{\vartheta}_o(\zeta)\in L_2(R;H)$, где $\hat{\vartheta}_o(\zeta)$ есть преобразование Фурье вектор-функции $\vartheta_o(\zeta)$. Пусть $\hat{g}(\zeta)$ есть преобразование Фурье вектор- функции $g(t)$, продолженной на отрицательную полуось как нулевая вектор- функция. Тогда очевидно, что

$$\left\|A^2\hat{\vartheta}_0(\zeta)\right\|_{L_2}=\left\|A^2\left(-(-i\zeta+\gamma)^2E+A^2\right)^{-1}\hat{g}(\zeta)\right\|_{L_2}\le$$
$$\le\sup_{\zeta\in R}\left\|A^2\left(-(-i\zeta+\gamma)^2E+A^2\right)^{-1}\right\|\left\|g\right\|_{L_2}. \tag{13}$$

Из спектрального разложения оператора A следует, что при любом $\zeta\in R$

$$\left\|A^2\left(-(-i\zeta+\gamma)^2E+A^2\right)^{-1}\right\|\le\sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\mu^2\left(-(-i\zeta+\gamma)^2+\mu^2\right)^{-1}\right|=$$
$$=\sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\mu^2\left((\zeta^2-\gamma^2+\mu^2)^2+4\zeta^2\gamma^2\right)^{-1/2}\right|\le\sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\mu^2\left(\zeta^2-\gamma^2+\mu^2\right)^{-1}\right|\le\frac{\mu_0^2}{\mu_0^2-\gamma^2}.$$

Таким образом, из неравенства (13) получаем, что $A^2\hat{\vartheta}_o(\zeta)\in L_2(R;H)$. Аналогично доказывается, что $\zeta^2\hat{\vartheta}(\zeta)\in L_2(R;H)$. Теперь будем искать решение задачи (10),(11) в виде

$$\vartheta(t)=\overline{\vartheta}_0(t)+e^{-t(A-\gamma E)}\varphi_0,$$

где $\overline{\vartheta}_o(t)$ есть сужение вектор-функции $\vartheta_o(t)$ на $[0;\infty)$, φ_o пока неизвестный вектор из пространства $H_{3/2}$. Очевидно, что $\overline{\vartheta}_0(t)\in W_2^2(R_+;H)$, поэтому по теореме о следах [1], вытекает, что $\overline{\vartheta}_0(0)\in H_{3/2}$. Из условия (11) следует, что $\varphi_0=-\overline{\vartheta}_0(0)\in H_{3/2}$. Таким образом, $\vartheta(t)\in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H)$. Далее, очевидно, что

$$\left\|P_{o,\gamma}\vartheta\right\|_{L_2}\le const\left\|\vartheta\right\|_{L_2}.$$

Тогда из теоремы Банаха об обратном операторе вытекает, что $P_{0,\gamma}$ является изоморфизмом. Тогда оператор P_0 также отображает пространство $\overset{o}{W}{}_{2,\gamma}^2(R_+;H)$ на $L_{2,\gamma}(R_+;H)$. Лемма доказана.

Теперь оценим нормы операторов промежуточных производных. Справедлива

Теорема 1. Пусть выполняются условия леммы 1.Тогда при всех $u \in \overset{o}{W}{}^2_{2,\gamma}(R_+;H)$ имеют место оценки

$$\|A^2 u\|_{L_{2,\gamma}} \le c_0(\gamma;\mu_0)\|P_0 u\|_{L_{2,\gamma}}, \tag{14}$$

$$\|Au'\|_{L_{2,\gamma}} \le c_1(\gamma;\mu_0)\|P_0 u\|_{L_{2,\gamma}}, \tag{15}$$

$$\|u''\|_{L_{2,\gamma}} \le c_2(\gamma;\mu_0)\|P_0 u\|_{L_{2,\gamma}}, \tag{16}$$

где

$$c_0(\gamma;\mu_0) = \frac{\mu_0^2}{\mu_0^2-\gamma^2}\ ;\ c_1(\gamma;\mu_0) = \frac{1}{2} + \frac{2\gamma^2}{\mu_0^2-\gamma^2};$$

$$c_2(\gamma;\mu_0) = \left(1 + \frac{\mu_0^2\gamma^2}{(\mu_0^2-\gamma^2)^2}\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать верность следующих неравенств, которые эквивалентны (14)- (16):

$$\|A^2\vartheta\|_{L_2} \le c_0(\gamma;\mu_0)\|P_{0,\gamma}\vartheta\|_{L_2}, \quad \vartheta(t) \in \overset{o}{W}{}^2_2(R_+;H), \tag{17}$$

$$\left\|A\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)\vartheta\right\|_{L_2} \le c_1(\gamma;\mu_0)\|P_{0,\gamma}\vartheta\|_{L_2}, \quad \vartheta(t) \in \overset{o}{W}{}^2_2(R_+;H), \tag{18}$$

$$\left\|\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)^2\vartheta\right\|_{L_2} \le c_2(\gamma;\mu_0)\|P_{0,\gamma}\vartheta\|_{L_2}, \quad \vartheta(t) \in \overset{o}{W}{}^2_2(R_+;H). \tag{19}$$

Сперва докажем неравенство (18).

Так как

$$\left\|A\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)\vartheta\right\|_{L_2}^2 = \|A\vartheta'\|_{L_2}^2 + \gamma^2\|A\vartheta\|_{L_2}^2,$$

то, по теореме Планшареля, получаем, что

$$\left\| A\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)\vartheta \right\|_{L_2}^2 = \left\| \zeta A\hat{\vartheta}(\zeta)\right\|_{L_2}^2 + \gamma^2 \left\| A\hat{\vartheta}(\zeta)\right\|_{L_2}^2 \quad , \tag{20}$$

где $\hat{\vartheta}(\zeta)$ есть преобразование Фурье вектор-функции $\vartheta(t)$, продолженной на отрицательную полуось как нуль. Здесь все действия законны , так как $\vartheta(0)=0$. С другой стороны , после интегрирования по частям получаем:

$$\operatorname{Re}(P_{0,\gamma}\vartheta,\vartheta)_{L_2} = \operatorname{Re}\left[-(\vartheta',\vartheta)_{L_2} - 2\gamma(\vartheta,\vartheta)_{L_2} - \gamma^2\|\vartheta\|_{L_2}^2 + \|A\vartheta\|_{L_2}^2\right] =$$

$$= \|\vartheta\|_{L_2}^2 - \gamma^2\|\vartheta\|_{L_2}^2 + \|A\vartheta\|_{L_2}^2 = (\zeta^2-\gamma^2)\|\hat{\vartheta}\|_{L_2} + \|A\hat{\vartheta}\|_{L_2}^2 . \tag{21}$$

Тогда из (20) и (21) получаем:

$$\frac{\left\| A\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)\vartheta \right\|_{L_2}}{\operatorname{Re}(P_{0,\gamma}\vartheta,\vartheta)_{L_2}} = \frac{(\zeta^2+\gamma^2)^{1/2}\|A\hat{\vartheta}\|_{L_2}^2}{(\zeta^2-\gamma^2)\|\hat{\vartheta}\|_{L_2}^2 + \|A\hat{\vartheta}\|_{L_2}^2} \le \frac{1}{2}\frac{(\zeta^2+\gamma^2)+\|A\hat{\vartheta}\|_{L_2}^2}{(\zeta^2-\gamma^2)\|\hat{\vartheta}\|_{L_2}^2 + \|A\hat{\vartheta}\|_{L_2}^2}.$$

Пусть $\|\hat{\vartheta}\|_{L_2} = 1$. Тогда

$$\frac{\left\| A\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)\vartheta \right\|_{L_2}}{\operatorname{Re}(P_{0,\gamma}\vartheta,\vartheta)_{L_2}} \le \frac{1}{2}\frac{\zeta^2+\gamma^2+\|A\hat{\vartheta}\|_{L_2}^2}{\zeta^2-\gamma^2+\|A\hat{\vartheta}\|_{L_2}} = \frac{1}{2} + \frac{2\gamma^2}{(\zeta^2-\gamma^2)+\|A\hat{\vartheta}\|_{L_2}^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2\gamma^2}{\zeta^2-\gamma^2+\mu_0^2+\left(\|A\hat{\vartheta}\|_{L_2}^2-\mu_0^2\right)} \le \frac{1}{2}+\frac{2\gamma^2}{\mu_0^2-\gamma^2}. \tag{22}$$

Если $\|\hat{\vartheta}\|_{L_2} \ne 1$, $\hat{\vartheta} \ne 0$, то, используя неравенство (22), получаем:

$$\frac{\left\| A\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)\vartheta \right\|_{L_2}\|\vartheta\|_{L_2}}{\operatorname{Re}(P_{0,\gamma}\vartheta,\vartheta)_{L_2}} = \frac{(\zeta^2+\gamma^2)^{1/2}\|A\hat{\vartheta}\|_{L_2}\|\hat{\vartheta}\|_{L_2}}{(\zeta^2-\gamma^2)\|\hat{\vartheta}\|_{L_2}^2+\|A\hat{\vartheta}\|_{L_2}^2} =$$

$$= \frac{(\zeta^2+\gamma^2)^{1/2}\|A\omega\|_{L_2}}{(\zeta^2-\gamma^2)+\|A\omega\|_{L_2}} \le \frac{1}{2}+\frac{2\gamma^2}{\mu_0^2-\gamma^2} = c_2(\gamma;\mu_0), \tag{23}$$

где $\omega = \dfrac{\hat{\vartheta}}{\left\|\hat{\vartheta}\right\|_{L_2}}$. Очевидно , что $\left\|\omega\right\|_{L_2} = 1$.

Тогда из неравенства (23) следует , что

$$\left\|A\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)\vartheta\right\|_{L_2}\left\|\vartheta\right\|_{L_2} \le c_2(\gamma;\mu_0)\operatorname{Re}\left(P_{0,\gamma}\vartheta,\vartheta\right) \le c_2(\gamma;\mu_0)\left\|P_{0,\gamma}\vartheta\right\|_{L_2}\left\|\vartheta\right\|_{L_2},$$

т.е.

$$\left\|A\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)\vartheta\right\|_{L_2} \le c_2(\gamma;\mu_0)\left\|P_{0,\gamma}\vartheta\right\|_{L_2}.$$

Следовательно, неравенство (18) доказано.Докажем остальные неравенства.

Так как

$$\frac{\left\|A^2\vartheta\right\|_{L_2}^2}{\operatorname{Re}\left(P_{0,\gamma}\vartheta,A^2\vartheta\right)_{L_2}} = \frac{\left\|A^2\hat{\vartheta}\right\|_{L_2}^2}{(\zeta^2 \quad \gamma^2)\left\|A\hat{\vartheta}\right\|_{L_2}^2 + \left\|A^2\hat{\vartheta}\right\|_{L_2}} \le$$

$$\le \frac{\left\|A^2\hat{\vartheta}\right\|_{L_2}^2}{\dfrac{\gamma^2}{\mu_0^2}\left\|A^2\hat{\vartheta}\right\|_{L_2}^2 + \left\|A^2\hat{\vartheta}\right\|_{L_2}^2} = \frac{\mu_0^2}{\mu_0^2 \quad \gamma^2} = c_0(\gamma;\mu_0),$$

то

$$\left\|A^2\vartheta\right\|_{L_2}^2 \le c_0(\gamma;\mu_0)\operatorname{Re}\left(P_{0,\gamma}\vartheta,A^2\vartheta\right) \le c_0(\gamma;\mu_0)\left\|P_{0,\gamma}\vartheta\right\|_{L_2}\left\|A^2\vartheta\right\|_{L_2},$$

или

$$\left\|A^2\vartheta\right\|_{L_2} \le c_0(\gamma;\mu_0)\left\|P_{0,\gamma}\vartheta\right\|_{L_2}.$$

Теперь докажем неравенство (16). Так как при любом $\vartheta(t) \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H)$ имеют место следующие неравенства

$$\left\|P_{0,\gamma}\vartheta\right\|_{L_2}^2 = \left\|\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)^2\vartheta\right\|_{L_2}^2 + \left\|A^2\vartheta\right\|_{L_2}^2 - 2Re\left(\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)^2\vartheta,A^2\vartheta\right)_{L_2} =$$

$$= \left\|\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)^2\vartheta\right\|_{L_2}^2 + \left\|A^2\vartheta\right\|_{L_2}^2 + 2\left\|A\frac{d\vartheta}{dt}\right\|_{L_2}^2 - 2\gamma^2\left\|A\vartheta\right\|_{L_2}^2 \ge$$

$$\geq \left\| \left(\frac{d}{dt} + \gamma \right)^2 \vartheta \right\|_{L_2}^2 + \left\| A^2 \vartheta \right\|_{L_2}^2 - \frac{2\gamma^2}{\mu_0^2} \left\| A^2 \vartheta \right\|_{L_2}^2 = \left\| \left(\frac{d}{dt} + \gamma \right)^2 \vartheta \right\|_{L_2}^2 +$$

$$+ \left(1 - \frac{\gamma^2}{\mu_0^2} \right) \left\| A^2 \vartheta \right\|_{L_2}^2 - \frac{\gamma^2}{\mu_0^2} \left\| A^2 \vartheta \right\|_{L_2}^2 \geq \left\| \left(\frac{d}{dt} + \gamma \right)^2 \vartheta \right\|_{L_2}^2 - \frac{\gamma^2}{\mu_0^2} \left\| A^2 \vartheta \right\|_{L_2}^2,$$

то, учитывая неравенство (14), получаем:

$$\left\| \left(\frac{d}{dt} + \gamma \right)^2 \vartheta \right\|_{L_2}^2 \leq \left(1 + \frac{\gamma^2}{\mu_0^2} \cdot \left(\frac{\mu_0^2}{\mu_0^2 - \gamma^2} \right)^2 \right) \cdot \left\| P_{0,\gamma} \vartheta \right\|_{L_2}^2 =$$

$$= \left(1 + \frac{\mu_0^2 \gamma^2}{\left(\mu_0^2 - \gamma^2 \right)^2} \right) \cdot \left\| P_{0,\gamma} \vartheta \right\|_{L_2}^2 = c_2^2(\gamma; \mu_0) \left\| P_{0,\gamma} \vartheta \right\|_{L_2}^2.$$

Терема доказана.

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1), 2), $|\gamma| < \mu_0$ и имеет место неравенство:

$$K(\gamma;\mu_0) = c_0(\gamma;\mu_0)\|B_2\| + c_1(\gamma;\mu_0)\|B_1\| + c_2(\gamma;\mu_0)\|B_0\| < 1,$$

где коэффициенты $c_0(\gamma;\mu_0), c_1(\gamma;\mu_0)$ и $c_2(\gamma;\mu_0)$ определяются из теоремы 1. Тогда краевая задача (1),(2) регулярно разрешима.

Доказательство. По теореме 1 оператор P_0 отображает пространство $\overset{0}{W}{}^2_{2,\gamma}(R_+;H)$ на $L_2(R_+;H)$ изоморфно. Тогда, после замены $P_0 u = \omega$, из уравнения $Pu = f$, где $u \in \overset{o}{W}{}^2_{2,\gamma}(R_+;H)$, а $f \in L_{2,\gamma}(R_+;H)$, получаем следующее уравнение

$$(E + P_1 P_0^{-1})\omega = f$$

в пространстве $L_{2,\gamma}(R_+;H)$.

Так как при любом $\omega \in L_{2,\gamma}(R_+;H)$ имеет место неравенство (см. теорему 1):

$$\left\| P_1 P_0^{-1} \omega \right\|_{L_{2,\gamma}} = \left\| P_1 u \right\|_{L_{2,\gamma}} \leq \sum_{j=0}^{2} \left\| A_{2-j} u^{(j)} \right\|_{L_{2,\gamma}} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{2} c_j(\gamma;\mu_0) \left\| B_{2-j} \right\| \left\| P_0 u \right\|_{L_{2,\gamma}} = K(\gamma;\mu_0) \|\omega\|_{L_{2,\gamma}},$$

то норма оператора $P_1 P_0^{-1}$ меньше, чем $K(\gamma;\mu_0) < 1$. Тогда оператор $E + P_1 P_0^{-1}$ ограничен, обратим в $L_2(R_+;H)$ и

$$u = P_0^{-1}\left(E + P_1 P_0^{-1}\right)^{-1} f .$$

Отсюда следует , что

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(R;H)} \le const\|f\|_{L_{2,\gamma}(R;H)} .$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., Мир , 1971, 371 с.
2. Мирзоев С.С. О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в пространствах с весом. «Линейные операторы и их приложения», Баку , 1989, стр.46-49.
3. Дубинский Ю.А. Смешанные задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений с частными производными. Труды Московского Математического Общества, 1969, т. 20, стр.205-240.
4. Дубинский Ю.А. О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка. Математический сборник , 1973, т.20 (132) , стр.3-22.
5. Асланов Г.И. О разрешимости и асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Успехи мат. наук, 1993, вып 4, с. 172 -173.
6. Алиев А.Р., Гумбаталиев Р.З. О разрешимости одной краевой задачи в пространстве с весом. Вестник Бакинского Университета, серия физ.-мат. наук, 2003, № 2, с. 47-57 .
7. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа. Дифф. уравнения, 1992, т. 28, № 4, с.651-661.
8. Мирзоев С.С. Вопросы теории разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними. Диссертация на соискание уч. степ. докт.физ.-мат. наук, Баку, 1993, 229 с.

ÇƏKİLİ FƏZALARDA BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN REQULYAR HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

S.S.MİRZƏYEV, E.N.MƏMMƏDOV

XÜLASƏ

İşdə müəyyən çəkili hilbert fəzalarında elleptik tip ikinci tərtib operatorlar üçün bir sərhəd məsələsinin requlyar həll olunması isbat edilmişdir. Operator-diferensial tənliyin baş hissəsindəki operatorun spektrinin ən kiçik qiyməti ilə çəkili fəzanın göstəricisi arasında münasibət müəyyən olunmuş, aralıq törəmə operatorlarının normaları tənliyin baş hissəsi ilə qiymətləndirilmişdir.

ON THE REGULAR SOLVABILITY

OF ONE BOUNDARY- VALUE PROBLEM IN WEIGHT SPACES

S.S.MIRZOYEV, E.N.MAMEDOV

SUMMARY

Theorem on the regular solvability of one boundary- value problem for the operator-differential equation of the second order of elliptic type in some weight Hilbert spaces is obtained in the paper. Connection between greates lower bound of spectrum of the operator-differential equation with the exponent of weight space is defined. Estimations of norms of intermediate derivatives operators relatively the main part of the operator- differential operator are also obtained.